Algorithme pour l'optimisation algébrique globale

Aurélien Greuet[1,2] et Mohab Safey El Din[2]

[1]Laboratoire de Mathématiques de Versailles
[2]Équipe-projet POLSYS (INRIA/UPMC/LIP6)

On considère le problème d'optimisation algébrique globale : étant donnés $f \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$, $\mathbf{F} = \{f_1, \ldots, f_p\} \subset \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ et V la variété algébrique $V(\mathbf{F}) = \{x \in \mathbb{C} \mid f_1(x) = \cdots = f_p(x) = 0\}$, on cherche à calculer

$$f^\star = \inf_{x \in V \cap \mathbb{R}^n} f(x).$$

Ce problème apparaît naturellement dans plusieurs domaines des sciences de l'ingénieur, pour lesquels il est important de disposer d'algorithmes efficaces et fiables.

Dans cet exposé, on donne des résultats sous certaines hypothèses satisfaites génériquement : on suppose que l'ensemble des contraintes $\mathbf{F}$ définit un idéal radical et une variété $V = V(\mathbf{F})$ lisse et équidimensionnelle.

On présente alors un algorithme d'optimisation algébrique globale qui calcule la valeur de $f^\star$, donnée par un polynôme univarié et un intervalle d'isolation. En prime, l'algorithme peut déterminer si $f^\star$ est atteint ou pas. S'il est atteint, il est capable de renvoyer la paramétrisation rationelle d'un point $x^\star \in V \cap \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^\star) = f^\star$.

L'algorithme a une complexité simplement exponentielle en le nombre de variables, ce qui correspond aux meilleures bornes connues. Il a été implanté en Maple et testé sur des problèmes provenant d'applications mais aussi sur des entrées aléatoires denses. Cette implantation a permis de résoudre des problèmes jusqu'ici impraticables.

Les résultats géométriques menant à cet algorithme, permettant de prouver qu'il est correct et d'en estimer la complexité sont obtenus en modifiant la notion de variété polaire utilisée par Bank, Giusti, Heintz, Mbakop, Pardo, Safey El Din et Schost.