La méthode de Griffiths–Dwork et la création télescopique pour les fractions rationnelles

Alin Bostan[1], Pierre Lairez[1] & Bruno Salvy[2]

[1]Inria, projet SpecFun
[2]Inria, ENS Lyon, projet AriC

Dans le domaine du calcul formel, la *création télescopique* est une approche générale, due à Doron Zeilberger, visant à traiter le calcul des sommes ou des intégrales définies à paramètres. Dans le cas des fractions rationnelles ou des fonctions algébriques, la création télescopique rejoint la notion plus ancienne d'*équation de Picard–Fuchs*.

Nous nous intéressons au cas des fractions rationnelles en plusieurs variables : étant donné une fraction $F(t, x_1, \ldots, x_n)$, trouver un opérateur différentiel T à coefficients polynomiaux, disons $T = \sum_{j=0}^{n} c_j(t)\partial_t^j$, et n fractions rationnelles $A_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ telles que

$$\sum_{j=0}^{n} c_j(t)\frac{\mathrm{d}^j F}{\mathrm{d}t^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}x_i}.$$

L'opérateur T s'appelle un *télescopeur* de F et les A_i forment un *certificat* pour T. Si le certificat n'a pas de pôles outre ceux de F, alors un télescopeur T de F est une équation différentielle pour les intégrales dépendant de t du type $\int_\gamma F\mathrm{d}\mathbf{x}$, où γ est un domaine d'intégration sans bord ne passant pas par les pôles de F. Ces intégrales sont appelées *périodes*. De nombreuses fonctions apparaissant en physique théorique et en combinatoire sont des périodes ; le calcul d'une équation différentielle vérifiée par une période n'est pas toujours accessible, même si elle est de petite taille.

Nous proposons un algorithme pour calculer un télescopeur d'une fraction rationnelle donnée. Les télescopeurs obtenus ont toujours des certificats vérifiant l'hypothèse de régularité précitée. Si d est le degré de la fraction rationnelle, nous montrons que notre algorithme calcule un télescopeur d'ordre moindre que d^n et de degré $d^{O(n)}$ en $d^{O(n)}$ opérations arithmétiques, là où les méthodes précedemment connues en utilisaient $d^{O(n^2)}$.

L'algorithme se base sur la méthode de Griffiths–Dwork, une généralisation à plusieurs variables de la réduction de Hermite. Elle permet de se ramener à de l'algèbre linéaire sur des matrices de polynômes et d'éviter le calcul du certificat. Ces deux caractéristiques nous permettent d'atteindre la complexité annoncée.